

INF 1771 – Inteligência Artificial

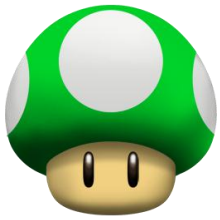
Aula 06 – Lógica Proposicional

Edirlei Soares de Lima
<elima@inf.puc-rio.br>



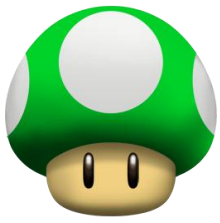
Lógica Proposicional

- ❏ Lógica simples.
- ❏ As sentenças são formadas por conectivos como: “e”, “ou”, “então”.
- ❏ É necessário definir:
 - ❏ **Sintaxe** (sentenças válidas).
 - ❏ **Semântica** (modo pelo qual a verdade das sentenças é determinada).
 - ❏ **Consequência lógica** (relação entre uma sentença e outra que decorre dela).
 - ❏ **Algoritmo para inferência lógica.**



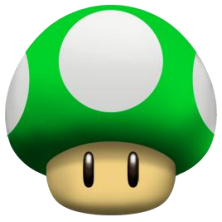
Sintaxe em Lógica Proposicional

- ❏ A sintaxe da lógica proposicional define as sentenças permitidas. É formada por:
 - ❏ **Símbolos:** nomes em letras maiúsculas (P, Q, R, ...) que podem assumir verdadeiro e falso;
 - ❏ **Sentenças atômicas:** constituídas por elementos sintáticos indivisíveis (símbolo proposicional);
 - ❏ **Sentenças complexas:** são construídas a partir de sentenças mais simples com a utilização de conectivos lógicos: \neg (não), \wedge (e), \vee (ou), \Rightarrow (implica), \Leftrightarrow (dupla implicação)
 - ❏ Sentença cujo principal conectivo é \wedge : conjunção
 - ❏ Sentença cujo principal conectivo é \vee : disjunção



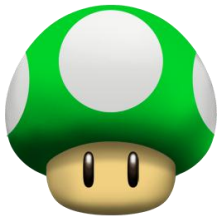
Gramática da Lógica Proposicional

- ❏ **Sentença** \rightarrow SentençaAtômica | SentençaComplexa
- ❏ **SentençaAtômica** \rightarrow Verdadeiro | Falso | Símbolo
- ❏ **Símbolo** \rightarrow P | Q | R | ...
- ❏ **SentençaComplexa** \rightarrow \neg Sentença
| (Sentença \wedge Sentença)
| (Sentença \vee Sentença)
| (Sentença \Rightarrow Sentença)
| (Sentença \Leftrightarrow Sentença)



Exemplos de Sentenças Validas

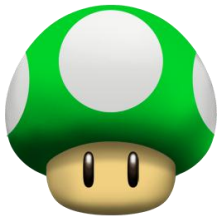
- 💡 P
- 💡 Verdadeiro
- 💡 $P \wedge Q$
- 💡 $(P \vee Q) \Rightarrow S$
- 💡 $(P \wedge Q) \vee R \Rightarrow S$
- 💡 $\neg(P \vee Q)$
- 💡 $\neg(P \vee Q) \Rightarrow R \wedge S$



Implicação Lógica (\Rightarrow)

💡 $P \Rightarrow Q$

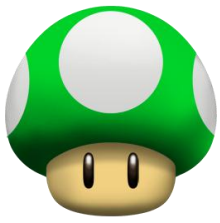
- 💡 Se P é verdade então Q também é verdade.
- 💡 Se esta chovendo então as ruas estão molhadas.



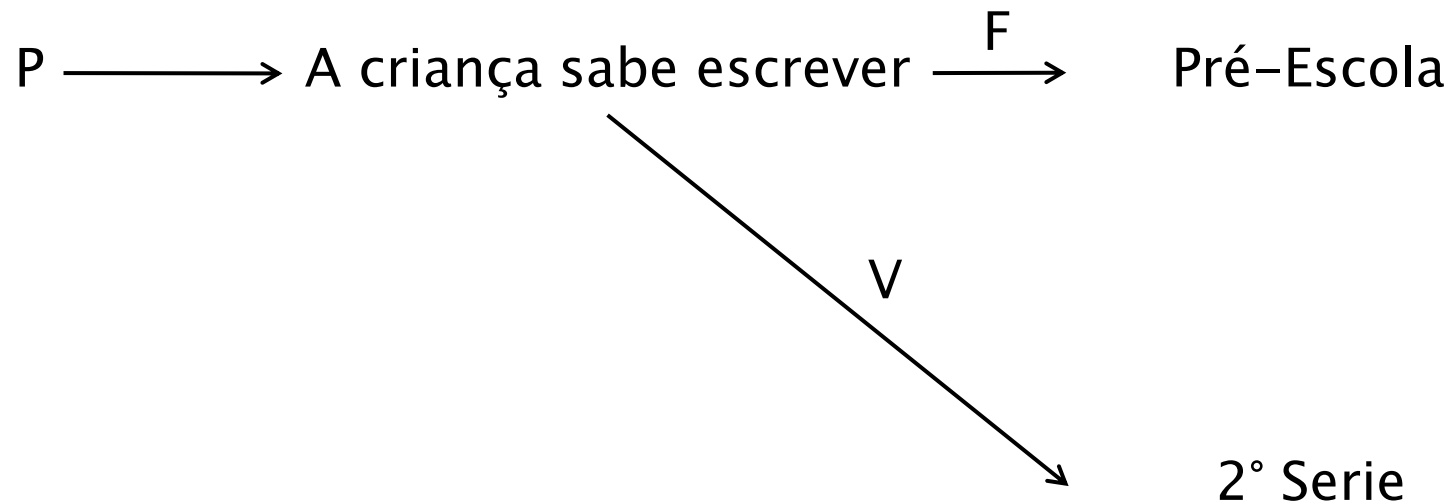
Equivalencia Lógica (\Leftrightarrow)

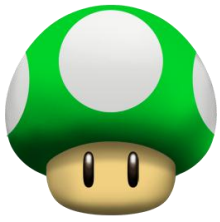
💡 $P \Leftrightarrow Q$

- 💡 Se P é verdade então Q também é verdade. Se Q é verdade então P também é verdade.
- 💡 Se dois lados de um triangulo são iguais então os dois ângulos da base do tribulo são iguais.
- 💡 A equivalência por ser substituída por duas sentenças de implicação: $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$



Semântica da Lógica Proposicional





Semântica em Lógica Proposicional

- ❏ Descreve como calcular o valor verdade de qualquer sentença com base em um mesmo **modelo**. É necessário definir como calcular a verdade de sentenças atômicas e como calcular a verdade de sentenças formadas com cada um dos cinco conectivos (\neg , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow).
- ❏ **Sentenças atômicas:**
 - ❏ Verdadeiro é verdadeiro e falso é falso em todo modelo.
 - ❏ O valor-verdade de todos os outros símbolos proposicionais deve ser especificado diretamente no modelo.
- ❏ **Sentenças complexas:**
 - ❏ As regras em cada conectivo são resumidas em uma **tabela-verdade**.



Tabela-verdade para os Conectivos

- Para os cinco conectivos lógicos apresentados, teremos:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V *	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

- (*) Lógica proposicional não exige relação de causa e efeito entre P e Q. Deve-se entender esta relação como “se P é verdadeira, então Q é verdadeira. Caso contrário, não estou fazendo nenhuma afirmação”. Exemplo:
 - “5 é ímpar implica que Tóquio é capital do Japão” (V)
 - “5 é par implica que João é inteligente” (V)



Exemplo: Mundo de Wumpus

❏ Vocabulário de símbolos proposicionais:

- ❏ Seja $P_{i,j}$ verdadeiro se existe poço em $[i,j]$
- ❏ Seja $B_{i,j}$ verdadeiro se existe brisa em $[i,j]$

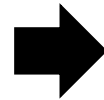
1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2 OK	2,2 P?	3,2	4,2
1,1 V OK	2,1 A B OK	3,1 P?	4,1



Exemplo: Mundo de Wumpus

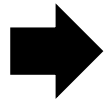
Base de Conhecimento:

R1: $\neg P_{1,1}$



Não há poço em [1,1].

R2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

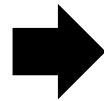


Um quadrado tem uma brisa se e somente se existe um poço em um quadrado vizinho (todos os quadrados devem ser declarados).

R3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R4: $\neg B_{1,1}$

R5: $B_{2,1}$



Percepções adquiridas pelo agente do mundo em que ele se encontra.

1,2 OK	2,2 P?	3,2
1,1 V OK	2,1 A B OK	3,1 P?



Inferência – Mundo de Wumpus

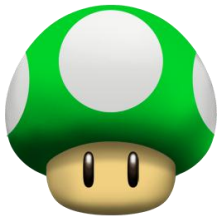
- ❏ **Inferência:** derivação de novas sentenças a partir de sentenças antigas.
- ❏ **Objetivo:** decidir se $BC \models \alpha$ para alguma sentença α .
Exemplos: $P_{1,2}$? $P_{2,2}$?
- ❏ **Algoritmo:** enumerar todos os modelos e verificar se α é verdadeira em todo modelo no qual BC é verdadeira.
 - ❏ Símbolos proposicionais relevantes:
 $B_{1,1}, B_{2,1}, P_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}, P_{2,2}, P_{3,1}$
 - ❏ 7 símbolos $\rightarrow 2^7 = 128$ modelos possíveis



Tabela Verdade - Mundo de Wumpus

$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{3,1}$	R1	R2	R3	R4	R5	BC
F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	F	F	F	V	V	V	F	V	F	F
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
F	V	F	F	F	F	F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	F	F	V	V	F
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	F	V	F

- Em três desses modelos toda a base de conhecimento é verdadeira.
- Nesses três modelos, $\neg P_{1,2}$ é verdadeira. Dessa maneira conclui-se que **não existe poço em [1,2]**.
- $P_{2,2}$ é verdadeira em dois dos três modelos e falsa em um. Assim, **não podemos dizer ainda se existe um poço em [2,2]**.



Equivalência

- ❏ Duas sentenças α e β são logicamente equivalentes ($\alpha \Leftrightarrow \beta$) se são verdadeiras no mesmo conjunto de modelos.

$(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$ comutatividade de \wedge

$(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$ comutatividade de \vee

$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ associatividade de \wedge

$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ associatividade de \vee

$\neg \neg \alpha \equiv \alpha$ eliminação de dupla negação

$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg \beta \Rightarrow \neg \alpha)$ contraposição

$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha \vee \beta)$ eliminação de implicação

$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$ eliminação de bicondicional

$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg \alpha \vee \neg \beta)$ de Morgan

$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$ de Morgan

$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$ distributividade de \wedge sobre \vee

$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$ distributividade de \vee sobre \wedge



Padrões de Raciocínio em Logica Proposicional

❗ **Modus Ponens:** A partir de uma implicação e a premissa da implicação, pode-se inferir a conclusão.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$$

❗ **Eliminação de E:** De uma conjunção, pode-se inferir qualquer um dos conjuntores.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

❗ **Resolução Unitária:** De uma disjunção, se um dos disjuntores é falso, então pode-se inferir que o outro é verdadeiro.

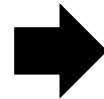
$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg \beta}{\alpha}$$



De Volta ao Mundo de Wumpus

Base de Conhecimento:

R1: $\neg P_{1,1}$



Não há poço em [1,1].

R2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

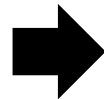


Um quadrado tem uma brisa se e somente se existe um poço em um quadrado vizinho (todos os quadrados devem ser declarados).

R3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R4: $\neg B_{1,1}$

R5: $B_{2,1}$



Percepções adquiridas pelo agente do mundo ele se encontra.

1,2 OK	2,2 P?	3,2
1,1 V OK	2,1 A B OK	3,1 P?



Provando $\neg P_{1,2}$ em Wumpus

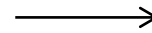
- ❏ Eliminação bicondicional em **R2**:

$$\mathbf{R2: } B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

$$\mathbf{R6: } (B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$$

- ❏ Eliminação de "e" em **R6**:

$$\mathbf{R7: } (P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$$



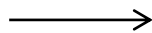
De uma conjunção, pode-se inferir qualquer um dos conjutores.

- ❏ Contraposição em R7:

$$\mathbf{R8: } \neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

- ❏ Modus Ponens (**R4** + **R8**)

$$\mathbf{R4: } \neg B_{1,1}$$



A partir de uma implicação e a premissa da implicação, pode-se inferir a conclusão.

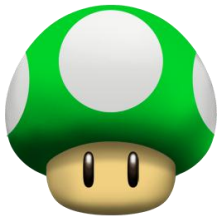
$$\mathbf{R9: } \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

- ❏ Regra de Morgan em **R9**:

$$\mathbf{R10: } \neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$$

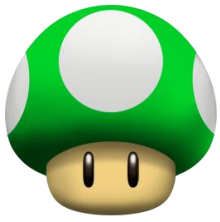
- ❏ Eliminação de "e" em **R10**: $\neg P_{1,2}$

1,2 OK	2,2 P?	3,2
1,1 V OK	2,1 A B OK	3,1 P?



Prova Lógica

- ❏ A aplicação de uma sequência de regras de inferências para derivar uma conclusão é chamado de **prova lógica**.
- ❏ A aplicação de inferências lógicas é uma **alternativa a enumeração de modelos** vista anteriormente.
- ❏ Como saber quais regras de inferência devem ser utilizadas?



Limitações da Lógica Proposicional

- ❏ A lógica proposicional é **simples de mais** para representar alguns problemas do mundo real.
- ❏ Em problemas complexos pode ser necessário a utilização de um **número muito grande de sentenças** para a criação de um agente realmente inteligente.