


Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 05 – Técnicas de Projeto de Algoritmos (Programação Dinâmica)

Edirlei Soares de Lima
<edirlei@iprj.uerj.br>

Estratégias de Projeto de Algoritmos

- **Força Bruta (Brute Force)**
 - **Dividir e Conquistar (Divide and Conquer)**
 - Diminuir e Conquistar (Decrease and Conquer)
 - Transformar e Conquistar (Transform and Conquer)
 - Compromisso Tempo–Espaço (Space and Time Tradeoffs)
 - **Estratégia Gulosa (Greedy)**
 - **Programação Dinâmica (Dynamic Programming)**
 - Voltando Atrás (Backtracking)
 - Ramificar e Limitar (Branch and Bound)
 - Algoritmos Aproximados
- 

Programação Dinâmica

- A programação dinâmica tem como objetivo reduzir o tempo de execução de um programa utilizando soluções ótimas a partir de subproblemas previamente calculados.
 - Resolvem-se os problemas de pequena dimensão e guardam-se as soluções;
 - A solução de um problema é obtida combinando as de problemas de menor dimensão.

Programação Dinâmica

- Passos gerais de um algoritmo baseado em Programação Dinâmica:
 - **Dividir o problema** em sub problemas;
 - **Computar** os valores de uma solução de forma bottom-up e **armazená-los** (memorização);
 - **Construir a solução** ótima para cada subproblema utilizando os valores computados.

- **Quando usar Programação Dinâmica?**
 - Quando a solução ótima de um subproblema pode ser composta pelas soluções ótimas dos subproblemas;
 - Quando o calculo da solução ótima implica muitas vezes no calculo do mesmo subproblema.

Exemplo 1: Série de Fibonacci

- Série de Fibonacci:

$$fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

- Algoritmo Simples:

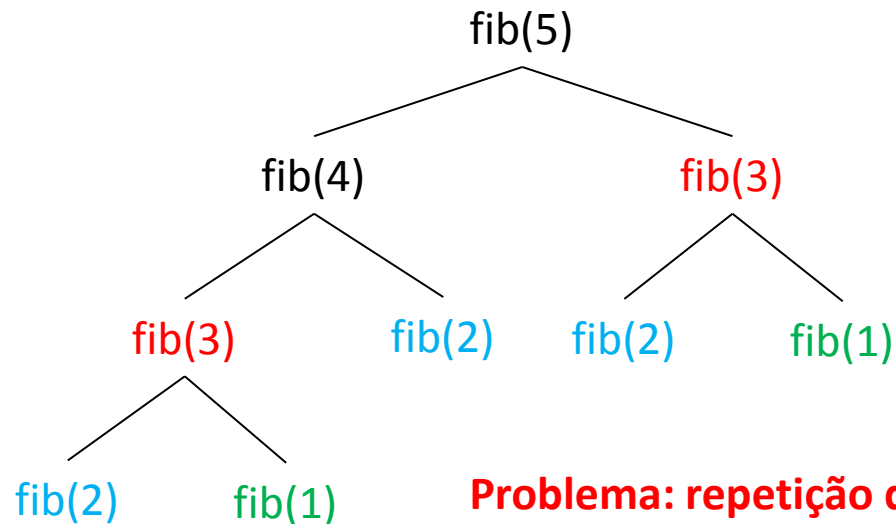
```
1. Fibonacci(n)
2.   se n < 2 então
3.     retorne n
4.   senão
5.     retorne fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2)
```

$O(2^n)$

Exemplo 1: Série de Fibonacci

- Algoritmo Simples:

```
1. fib(n)
2.   se n < 2 então
3.     retorne n
4.   senão
5.     retorne fib(n - 1) + fib(n - 2)
```



Problema: repetição de chamadas!

Exemplo 1: Série de Fibonacci

- Algoritmo Baseado em Programação Dinâmica:

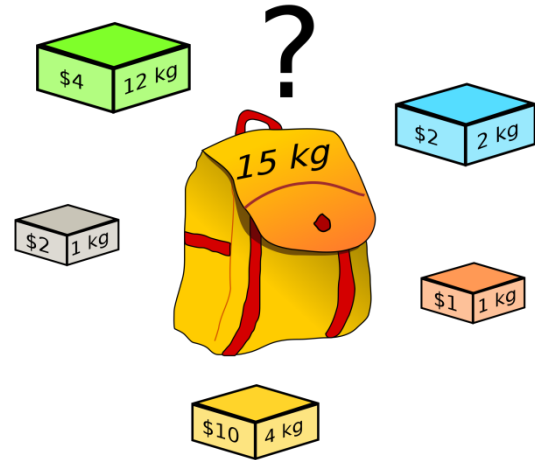
```
1. fib(n)
2.   se n < 2 então
3.     retorne n
4.   senão
5.     V[0] ← 0
6.     V[1] ← 1
7.     para i ← 2 até n faça
8.       V[i] ← V[i-1] + V[i-2]
9.     retorne V[i]
```

O(n)

Exemplo 2: Problema da Mochila

- **Dados n itens:**

- Pesos: w_1, w_2, \dots, w_n
- Valores: v_1, v_2, \dots, v_n
- Uma mochila de capacidade W



- **Problema:** encontrar o subconjunto mais valioso de itens que caibam dentro da mochila (Knapsack Problem).

Exemplo 2: Problema da Mochila

- **Problema:** encontrar o subconjunto mais valioso de itens que caibam dentro da mochila (Knapsack Problem).
- Solução Baseada em Programação Dinâmica:

$$c[i, w] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ ou } w = 0 \\ c[i - 1, w] & \text{se } w_i > w \\ \max\{v_i + c[i - 1, w - w_i], c[i - 1, w]\} & \text{se } i > 0 \text{ e } w_i \leq w \end{cases}$$

Exemplo 2: Problema da Mochila

$$c[i, w] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ ou } w = 0 \\ c[i - 1, w] & \text{se } w_i > w \\ \max\{v_i + c[i - 1, w - w_i], c[i - 1, w]\} & \text{se } i > 0 \text{ e } w_i \leq w \end{cases}$$

Item 1
$V_1 = 5$
$W_1 = 5$

Item 2
$V_2 = 4$
$W_2 = 6$

Item 3
$V_2 = 7$
$W_2 = 8$

Item 4
$V_2 = 7$
$W_2 = 4$

MAX = 13

		w													
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	2	0	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5	9	9	9
	3	0	0	0	0	0	5	5	5	7	7	7	9	9	12
	4	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	12	12	12	14

Exemplo 2: Problema da Mochila

```
1. Mochila_DP( $w_i, v_i, n, W$ )
2.   para  $w \leftarrow 0$  até  $W$  faça
3.      $V[0, w] \leftarrow 0$ 
4.   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5.      $V[i, 0] \leftarrow 0$ 
6.   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
7.     para  $w \leftarrow 0$  até  $W$  faça
8.       se  $w_i \leq w$  então
9.         se  $v_i + V[i-1, w-w_i] > V[i-1, w]$  então
10.           $V[i, w] \leftarrow v_i + V[i-1, w-w_i]$ 
11.        senão
12.           $V[i, w] \leftarrow V[i-1, w]$ 
13.        senão
14.           $V[i, w] \leftarrow V[i-1, w]$ 
15.   retorna  $V[n, W]$ 
```

$O(nW)$

Exemplo 2: Problema da Mochila

- O algoritmo encontra o máximo valor possível que pode ser carregado na mochila. Como descobrir quais itens devem ser carregados?
 - Toda a informação necessária para descobrir quais são os itens está na tabela.

```
1.  $i \leftarrow n$ 
2.  $k \leftarrow W$ 
3. enquanto  $i > 0$  e  $k > 0$  faça
4.     se  $V[i, k] \neq V[i-1, k]$  então
5.         coloque o item  $i$  na mochila
6.          $i \leftarrow i - 1$ 
7.          $k \leftarrow k - w_i$ 
8.     senão
9.          $i \leftarrow i-1$ 
```

Exemplo 2: Problema da Mochila

```

1.  $i \leftarrow n$ 
2.  $k \leftarrow W$ 
3. enquanto  $i > 0$  e  $k > 0$  faça
4.   se  $V[i, k] \neq V[i-1, k]$  então
5.     coloque o item  $i$  na mochila
6.      $i \leftarrow i - 1$ 
7.      $k \leftarrow k - w_i$ 
8.   senão
9.      $i \leftarrow i-1$ 

```

Item 1
$V_1 = 5$
$W_1 = 5$

Item 2
$V_2 = 4$
$W_2 = 6$

Item 3
$V_2 = 7$
$W_2 = 8$

Item 4
$V_2 = 7$
$W_2 = 4$

MAX = 13

w

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
i 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5
2	0	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5	9	9	9
3	0	0	0	0	0	5	5	5	7	7	7	9	9	12
4	0	0	0	0	7	7	7	7	7	12	12	12	14	14

Exemplo 2: Problema da Mochila

1. $i \leftarrow n$
2. $k \leftarrow W$
3. enquanto $i > 0$ e $k > 0$ faça
4. se $V[i, k] \neq V[i-1, k]$ então
5. coloque o item i na mochila
6. $i \leftarrow i - 1$
7. $k \leftarrow k - w_i$
8. senão
9. $i \leftarrow i-1$

Item 1
 $V_1 = 5$
 $W_1 = 5$

Item 2
 $V_2 = 4$
 $W_2 = 6$

Item 3
 $V_2 = 7$
 $W_2 = 8$

Item 4
 $V_2 = 7$
 $W_2 = 4$

MAX = 13

Solução: {Item 3, Item 4}

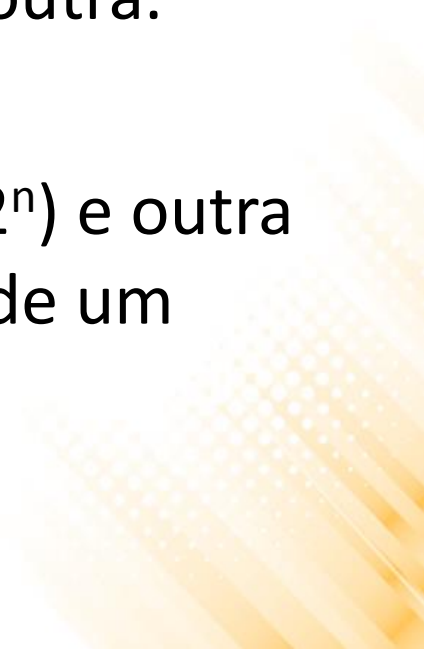
		W													
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	2	0	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5	9	9	9
	3	0	0	0	0	0	5	5	5	7	7	7	9	9	12
	4	0	0	0	0	7	7	7	7	7	12	12	12	14	14

Programação Dinâmica

- Outros algoritmos importantes baseados em divisão e conquista que veremos ao longo do curso:
 - Maior Subsequência Comum



Técnicas de Projeto de Algoritmos

- Infelizmente, não existe uma técnica que seja a melhor dentre todas.
 - Um problema pode ser resolvido de maneira mais eficiente adotando-se uma técnica do que outra.
 - Uma técnica pode levar a um algoritmo $O(2^n)$ e outra técnica a um algoritmo $O(n^2)$ na resolução de um mesmo problema.
- 

Exercícios

Lista de Exercícios 05 – Programação Dinâmica

<http://www.inf.puc-rio.br/~elima/paa/>



Leitura Complementar

- Levitin. **Introduction to the Design and Analysis of Algorithms**, 3rd Edition, 2011.
- **Capítulo 8: Dynamic Programming**

