Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

INF 1007 – Programação II

Aula 14 – Árvores Binárias

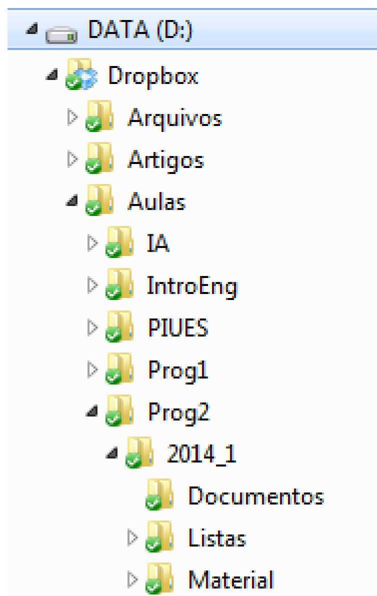
Edirlei Soares de Lima

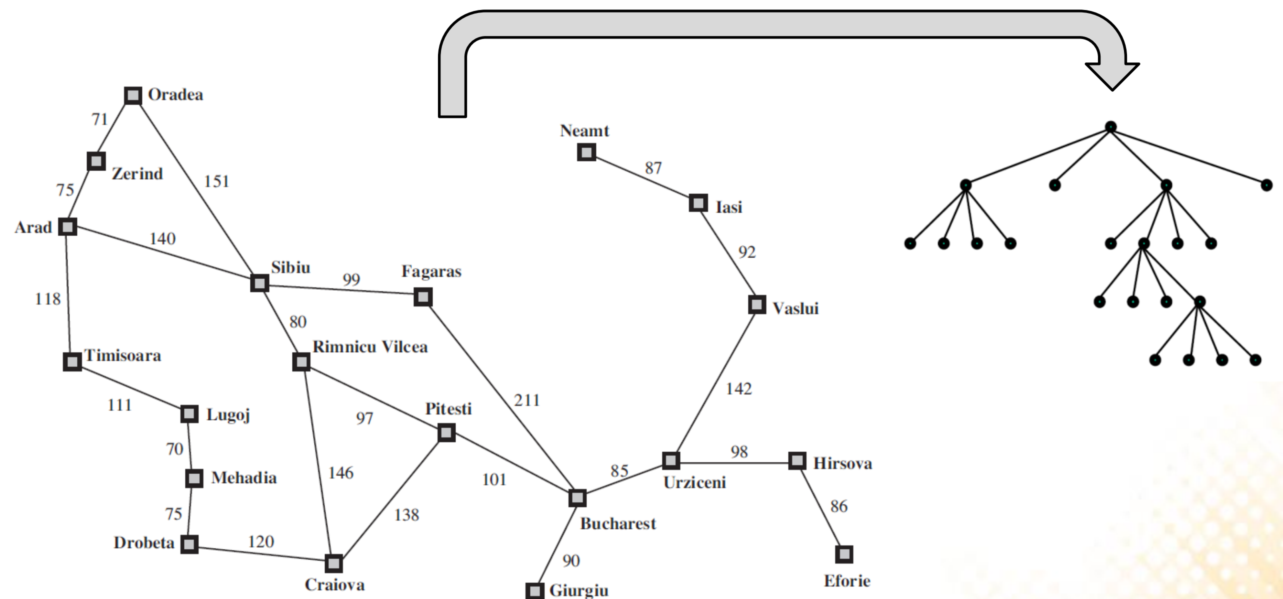
<elima@inf.puc-rio.br>

visionlab
visualization laboratory

Árvores

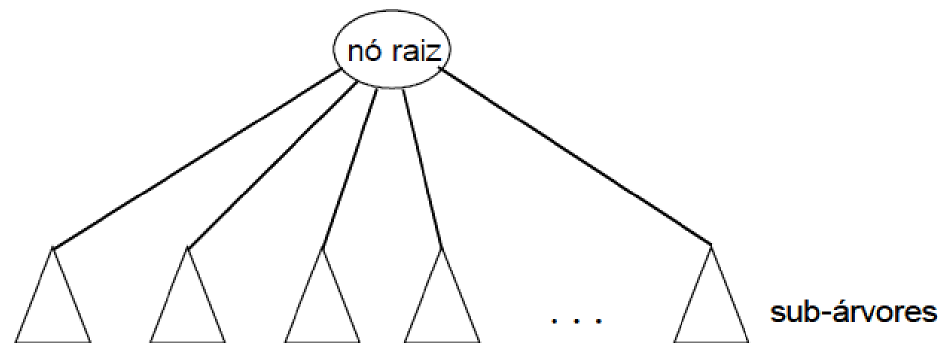
- Uma estrutura de dados do tipo árvore permite que dados sejam organizados de maneira hierárquica.
  - Exemplos: arquivos em diretórios, expressões aritméticas, planejamento de rotas...





Árvores

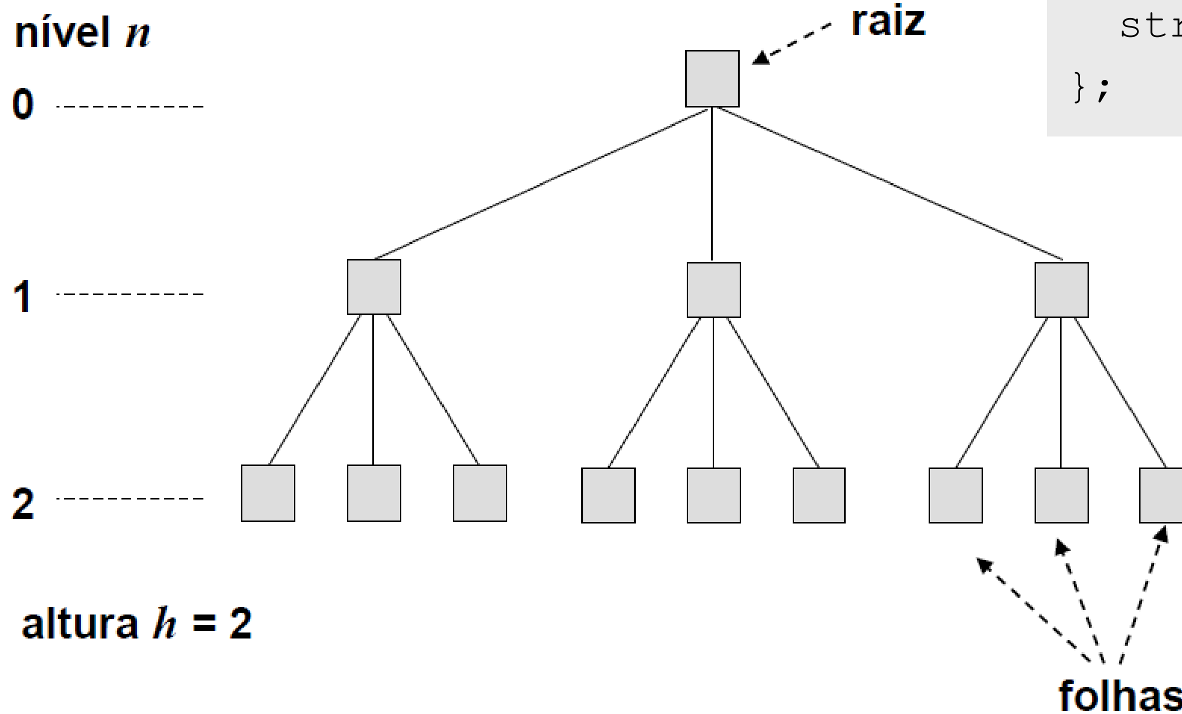
- Uma árvore é composta por um **conjunto de nós** tal que:
  - existe um nó r, denominado **raiz**, com zero ou mais sub-árvores, cujas raízes estão ligadas a r;
  - os nós raízes destas sub-árvores são os **filhos** de r;
  - os **nós internos** da árvore são os nós com filhos;
  - as **folhas** ou **nós externos** da árvore são os nós sem filhos;



Árvores

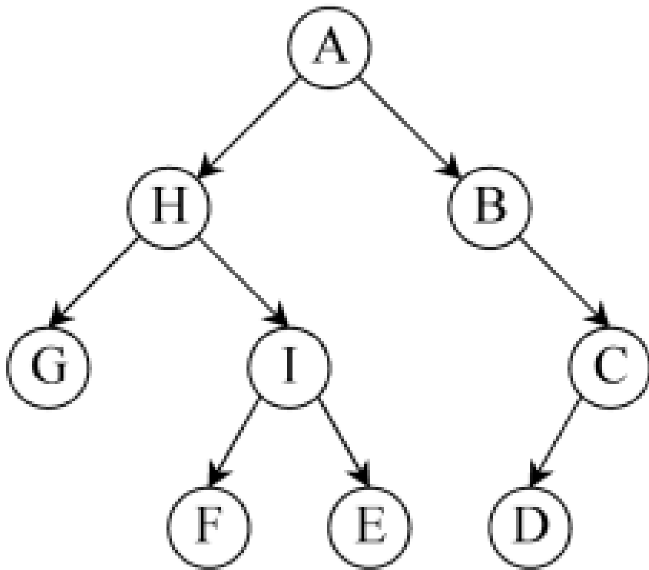
- Estrutura de uma Árvore:

```
#define N 3
struct noArvore
{
  int info;
  struct noArvore* filhos[N];
};
```



Árvores Binárias

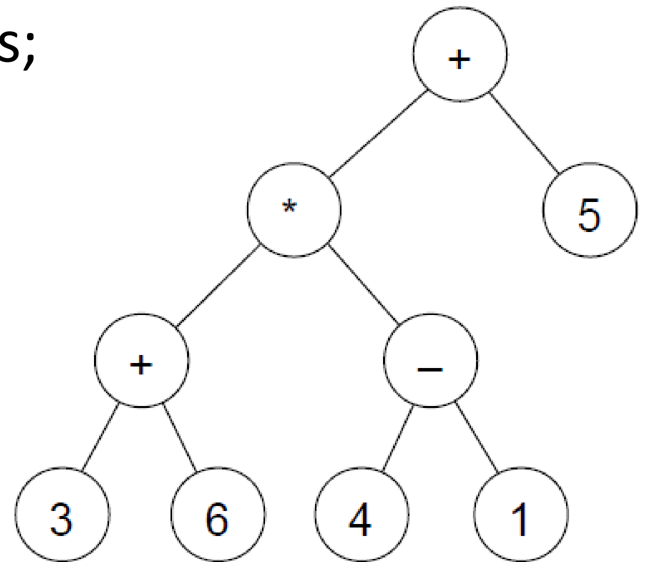
- Uma árvore binária é uma árvore em que **cada nó tem zero, um ou dois filhos**;




```
struct noArvore {
  char info;
  struct noArvore* esq;
  struct noArvore* dir;
};
```

Árvores Binárias

- **Exemplo:** árvores binárias representando expressões aritméticas:
  - nós folhas representam operandos;
  - nós internos operadores;
  - Exemplo: (3+6)*(4-1)+5



Árvores Binárias

Árvores Binárias – Implementação

- Representação de uma árvore:
  - através de um ponteiro para o nó raiz

- Representação de um nó da árvore:
  - Estrutura em C contendo:
    - a informação propriamente dita (exemplo: um caractere);
    - dois ponteiros para as sub-árvores, à esquerda e à direita;

```
struct noArvore {
  char info;
  struct noArvore* esq;
  struct noArvore* dir;
};
```

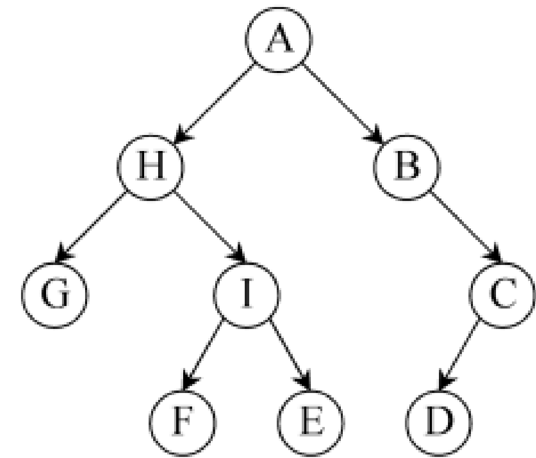
Árvores Binárias – Implementação

- Interface do tipo abstrato Árvore Binária: **arvore.h**

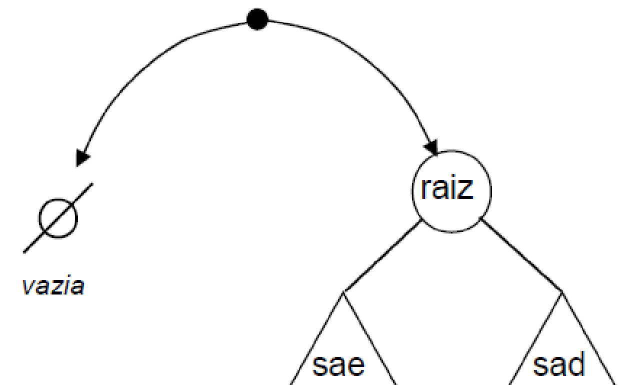
```
typedef struct noArvore NoArvore;

NoArvore* arvore_criavazia(void);
NoArvore* arvore_cria(char c, NoArvore* e, NoArvore* d);
NoArvore* arvore_libera(NoArvore* a);
int arvore_vazia(NoArvore* a);
int arvore_pertence(NoArvore* a, char c);
void arvore_imprime(NoArvore* a);
```

Árvores Binárias – Implementação

- Implementação das funções:
  - implementação recursiva, em geral;
  - usa a definição recursiva da estrutura;



- Uma árvore binária é:
  - uma árvore vazia; ou
  - um nó raiz com duas sub-árvores:
    - a sub-árvore da esquerda (sae);
    - a sub-árvore da direita (sad);



Árvores Binárias – Cria Vazia

- Função `arvore_criavazia:`
  - cria uma árvore vazia;

```
NoArvore* arvore_criavazia(void)
{
  return NULL;
}
```

Árvores Binárias – Cria

- Função `arvore_cria`:
  - cria um nó raiz dadas a informação e as duas sub-árvores, a da esquerda e a da direita;
  - retorna o endereço do nó raiz criado;

```
NoArvore* arvore_cria(char c, NoArvore* sae, NoArvore* sad)
{
  NoArvore* p = (NoArvore*)malloc(sizeof(NoArvore));
  p->info = c;
  p->esq = sae;
  p->dir = sad;
  return p;
}
```

Árvores Binárias – Libera

- Função `arvore_libera`:
  - libera memória alocada pela estrutura da árvore;
  - as sub-árvores devem ser liberadas antes de se liberar o nó raiz;
  - retorna uma árvore vazia, representada por NULL;

```
NoArvore* arvore_libera(NoArvore* a)
{
  if (!arvore_vazia(a)){
    arvore_libera(a->esq);    /* libera sae */
    arvore_libera(a->dir);    /* libera sad */
    free(a);                  /* libera raiz */
  }
  return NULL;
}
```

Árvores Binárias – Vazia

- Função `arvore_vazia:`
  - indica se uma árvore é ou não vazia;

```
int arvore_vazia(NoArvore* a)
{
  return a == NULL;
}
```

Árvores Binárias – Imprime 1

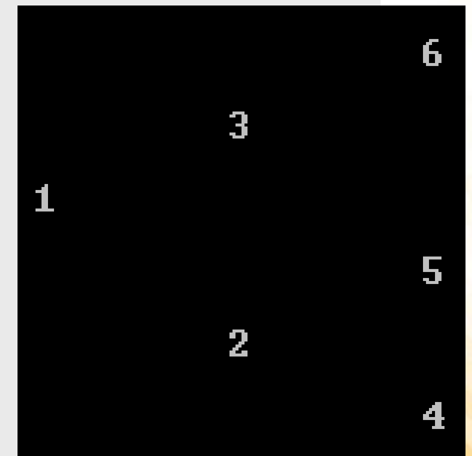
- Função `arvore_imprime`:
  - percorre recursivamente a árvore, visitando todos os nós e imprimindo sua informação;

```
void arvore_imprime(NoArvore* a)
{
  if (!arvore_vazia(a))
  {
    printf("%c ", a->info); /* mostra raiz */
    arvore_imprime(a->esq); /* mostra sae */
    arvore_imprime(a->dir); /* mostra sad */
  }
}
```

Árvores Binárias – Imprime 2

- Função `arvore_imprime`:
  - percorre recursivamente a árvore, visitando todos os nós e imprimindo sua informação formatada de acordo com a sua posição na árvore;

```
void arvore_imprime(NoArvore *a, int nivel)
{
  int n;
  if (arvore_vazia(a))
    return;
  arvore_imprime(a->dir, nivel + 1);
  for (n = 0; n < nivel; n++)
    printf("\t");
  printf("%d\n\n",a->info);
  arvore_imprime(a->esq, nivel + 1);
}
```



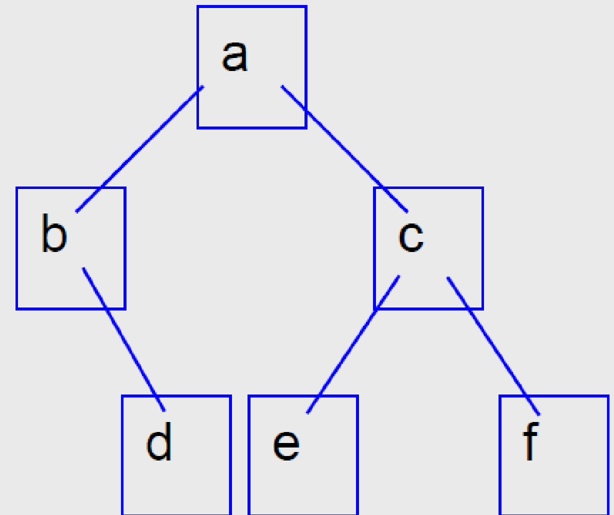
Árvores Binárias – Pertence

- Função `arvore_pertence`:
  - verifica a ocorrência de um caractere c em um de nós;
  - retorna um valor booleano (1 ou 0) indicando a ocorrência ou não do caractere na árvore;

```
int arvore_pertence (NoArvore* a, char c){
  if (arvore_vazia(a))
    return 0;         /* árvore vazia: não encontrou */
  else
    return a->info==c || arvore_pertence(a->esq,c) ||
                         arvore_pertence(a->dir,c);
}
```

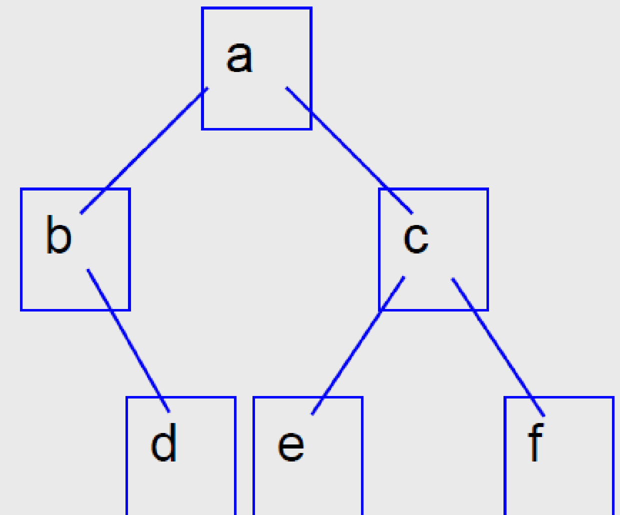
Árvores Binárias – Criação

```
/* sub-árvore 'd' */
NoArvore* a1= arvore_cria('d',arvore_criavazia(),arvore_criavazia());
/* sub-árvore 'b' */
NoArvore* a2= arvore_cria('b',arvore_criavazia(),a1);
/* sub-árvore 'e' */
NoArvore* a3= arvore_cria('e',arvore_criavazia(),arvore_criavazia());
/* sub-árvore 'f' */
NoArvore* a4= arvore_cria('f',arvore_criavazia(),arvore_criavazia());
/* sub-árvore 'c' */
NoArvore* a5= arvore_cria('c',a3,a4);
/* árvore 'a' */
NoArvore* a = arvore_cria('a',a2,a5 );
```



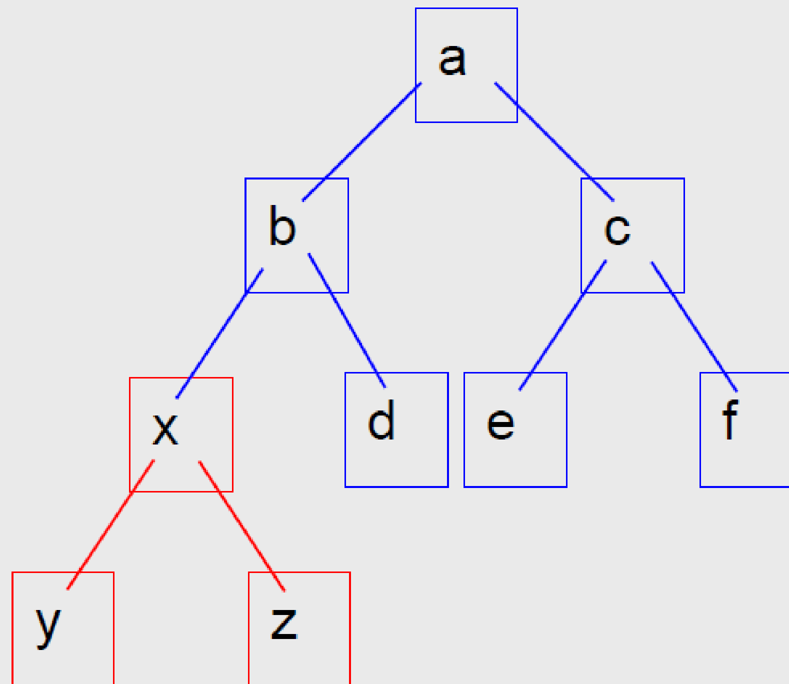
Árvores Binárias – Criação

```
NoArvore* a = arvore_cria('a',
                arvore_cria('b',
                  arvore_criavazia(),
                  arvore_cria('d', arvore_criavazia(),
                    arvore_criavazia())
                ),
                arvore_cria('c',
                  arvore_cria('e', arvore_criavazia(),
                    arvore_criavazia()),
                  arvore_cria('f', arvore_criavazia(),
                    arvore_criavazia())
                ));
```



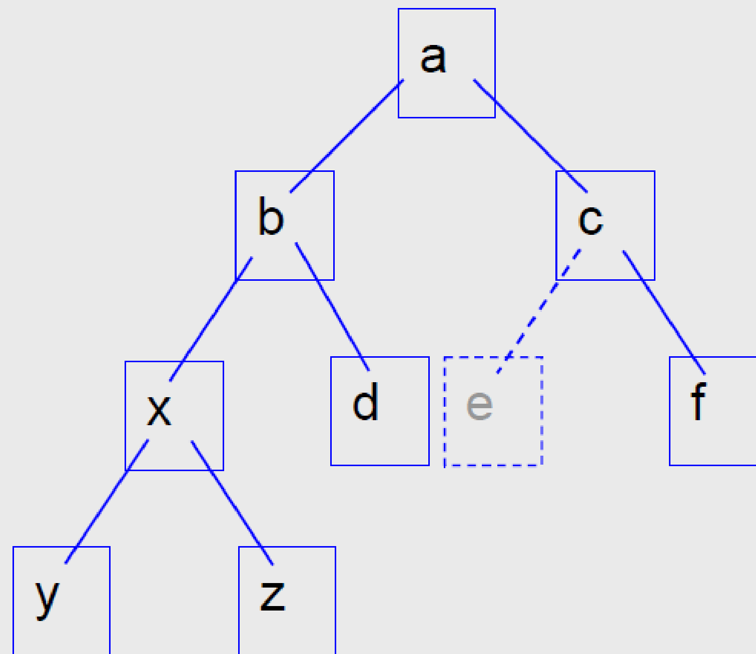
Árvores Binárias – Acrescentando Nós

```
a->esq->esq = arvore_cria('x',
                      arvore_cria('y',
                         arvore_criavazia(), arvore_criavazia()),
                      arvore_cria('z',
                         arvore_criavazia(), arvore_criavazia())
                      );
```



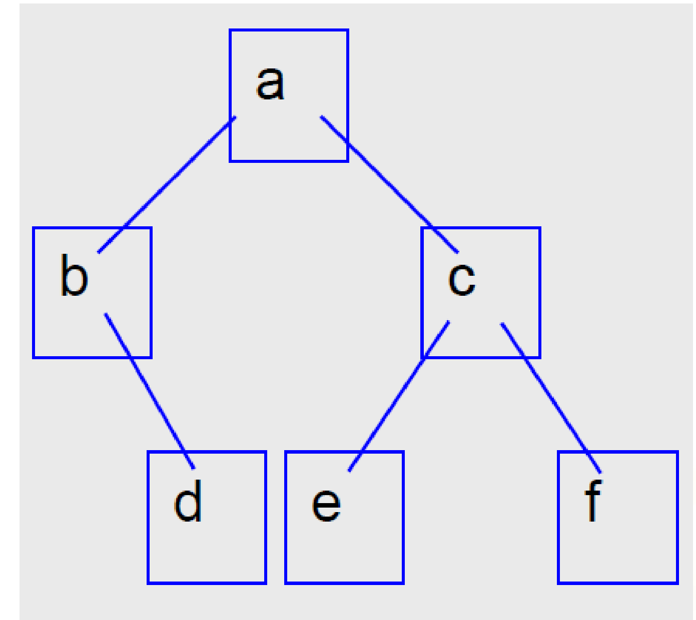
Árvores Binárias – Liberando Nós

```
a->dir->esq = libera(a->dir->esq);
```



Árvores Binárias – Ordens de Percurso

- **Pré-ordem:**
  - trata raiz, percorre sae, percorre sad;
  - exemplo: a b d c e f

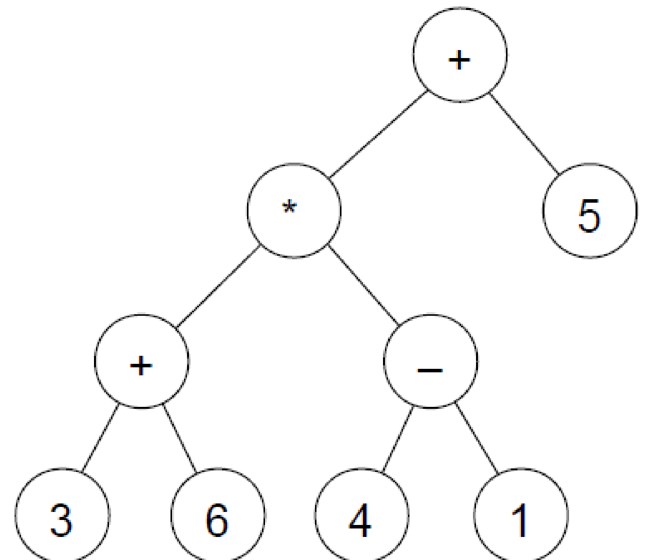


- **Ordem simétrica:**
  - percorre sae, trata raiz, percorre sad;
  - exemplo: b d a e c f
- **Pós-ordem:**
  - percorre sae, percorre sad, trata raiz;
  - exemplo: d b e f c a

Árvores Binárias – Exercício

- Considere uma árvore binária para representar expressões aritméticas:
  - nós folhas representam operandos;
  - nós internos operadores;
  - **Exemplo:** (3+6)*(4-1)+5

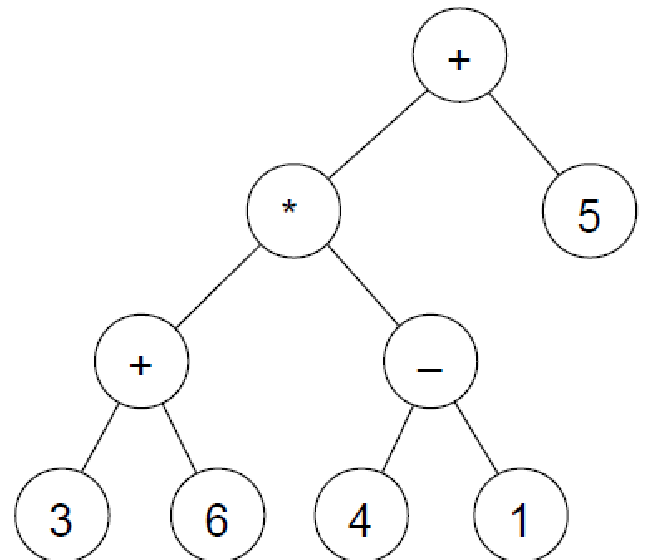
```
struct noArvore {
  int valor;
  char op;
  struct noArvore* esq;
  struct noArvore* dir;
};
```



Árvores Binárias – Exercício

- Considere uma árvore binária para representar expressões aritméticas:
  - nós folhas representam operandos;
  - nós internos operadores;
  - **Exemplo:** (3+6)*(4-1)+5

```
struct noArvore {
  int valor;
  char op;
  struct noArvore* esq;
  struct noArvore* dir;
};
```



Árvores Binárias – Exercício 1

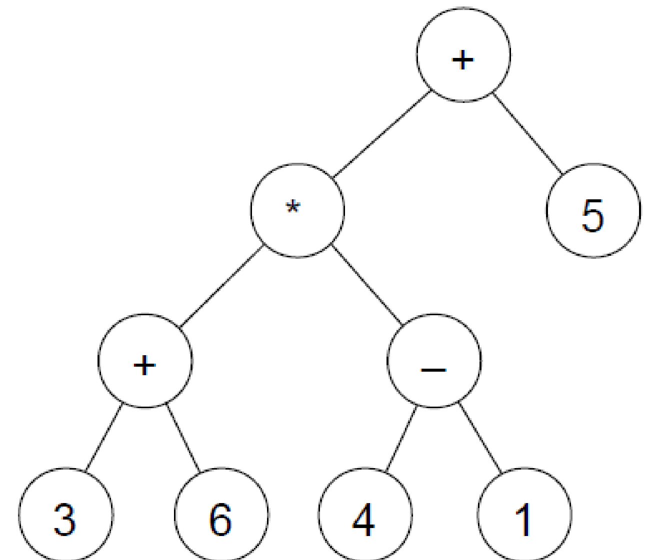
- Crie uma função para imprimir a expressão codificada em um árvore binária. A função deve seguir o seguinte protótipo:

```
void imprimeExp(NoArvore* a)
```

- Para o exemplo ao lado, a função deve imprimir a seguinte expressão:

(((3+6)*(4-1))+5)

```
struct noArvore {
  int valor;
  char op;
  struct noArvore* esq;
  struct noArvore* dir;
};
```



Árvores Binárias – Exercício 1

```
void imprimeExp(NoArvore* a)
{
  if (!arvore_vazia(a))
  {
    if (arvore_vazia(a->dir) && arvore_vazia(a->esq))
      printf("%d", a->valor);
    else {
      printf("(");
      arvore_imprimeExp(a->esq);
      printf("%c", a->op);
      arvore_imprimeExp(a->dir);
      printf(")");
    }
  }
}
```

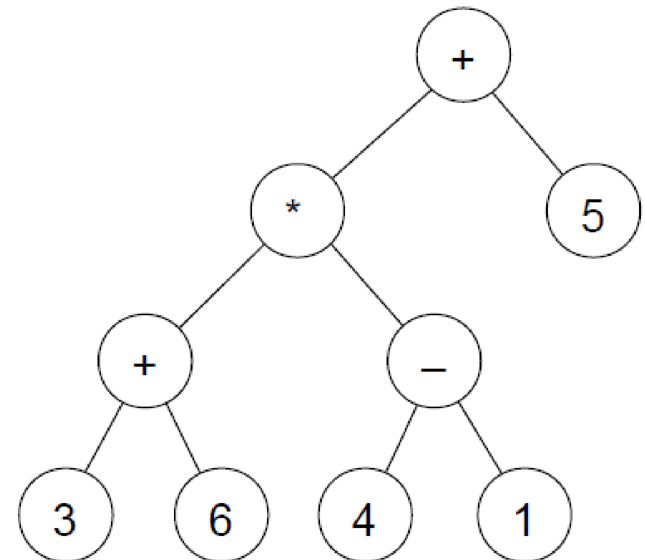
Árvores Binárias – Exercício 2

- Crie uma função para avaliar a expressão codificada em um árvore binária. A função deve seguir o seguinte protótipo:

```
float avalia(NoArvore* a)
```

- Para o exemplo ao lado, o resultado da expressão é: 20

```
struct noArvore {
  int valor;
  char op;
  struct noArvore* esq;
  struct noArvore* dir;
};
```



Árvores Binárias – Exercício 2

```
float avalia(NoArvore* a)
{
  if (arvore_vazia(a->dir) && arvore_vazia(a->esq))
    return a->valor;
  else {
    if(a->op == '+')
      return avalia(a->esq) + avalia(a->dir);
    if(a->op == '-')
      return avalia(a->esq) - avalia(a->dir);
    if(a->op == '*')
      return avalia(a->esq) * avalia(a->dir);
    if(a->op == '/')
      return avalia(a->esq) / avalia(a->dir);
  }
}
```

Exercícios

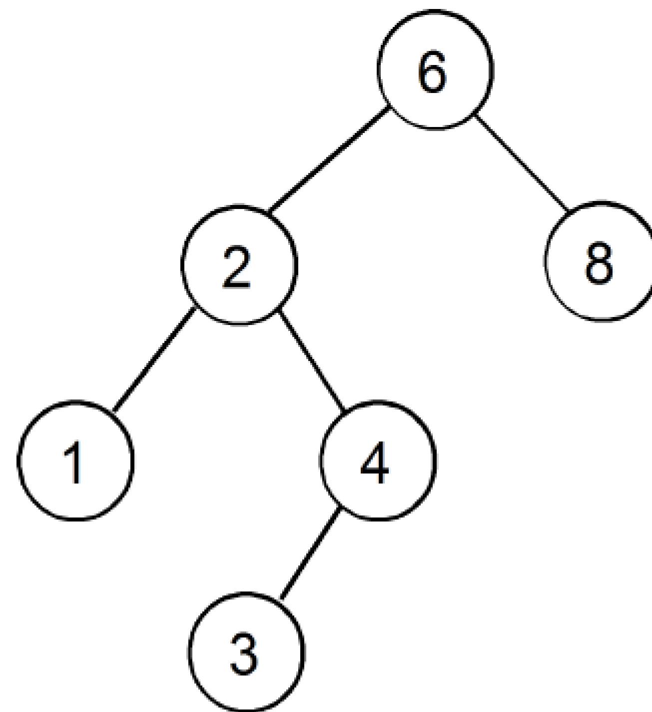
Lista de Exercícios 13 – Árvores Binárias

Árvore Binária de Busca (ABB)

- O valor associado à raiz é sempre maior que o valor associado a qualquer nó da sub-árvore à esquerda (sae);

- O valor associado à raiz é sempre menor ou igual (para permitir repetições) que o valor associado a qualquer nó da sub-árvore à direita (sad);

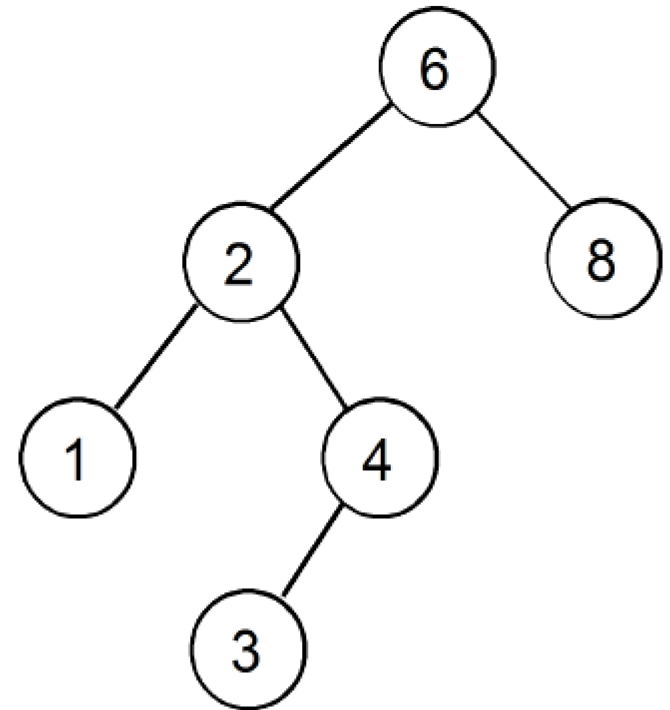
- Quando a árvore é percorrida em ordem simétrica (sae - raiz - sad), os valores são encontrados em ordem crescente;



Pesquisa em Árvore Binária de Busca

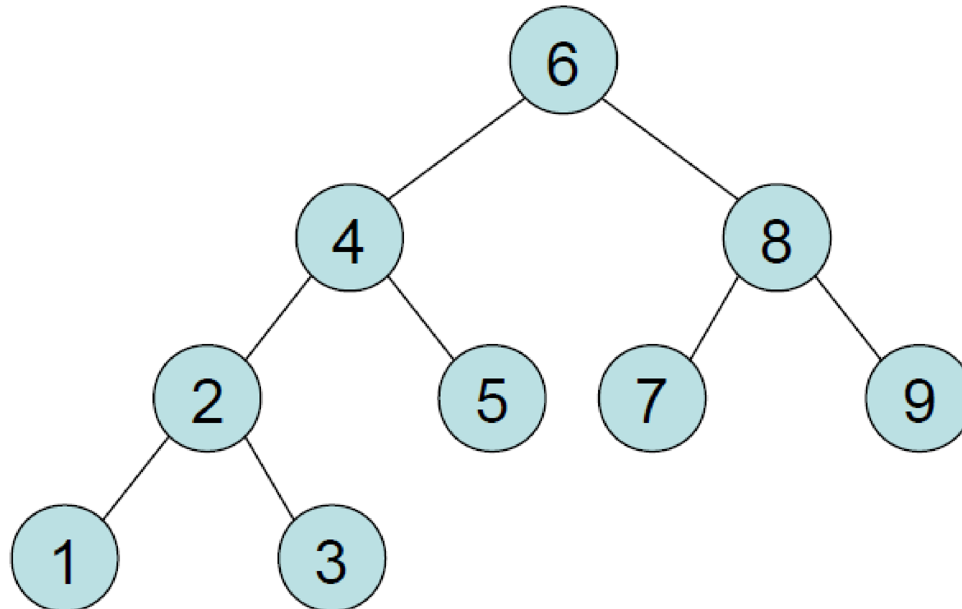
- Compare o valor dado com o valor associado à raiz:

- Se for **igual**, o valor foi encontrado;
- Se for **menor**, a busca continua na sae;
- Se for **maior**, a busca continua na sad;



Pesquisa em Árvore Binária de Busca

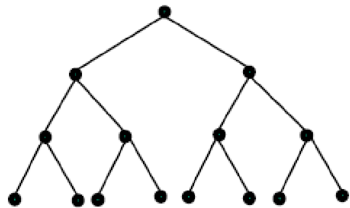
- Em **árvores balanceadas** os nós internos têm todos, ou quase todos, 2 filhos;
- Qualquer nó pode ser alcançado a partir da raiz em **O(log n)** passos;



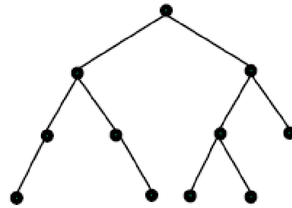
Pesquisa em Árvore Binária de Busca

- Em **árvores degeneradas** todos os nós têm apenas 1 filho, com exceção da (única) folha;

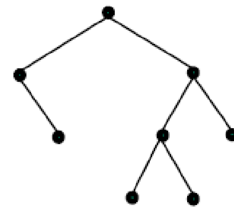
- Qualquer nó pode ser alcançado a partir da raiz em **O(n)** passos;



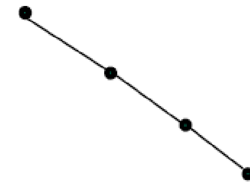
Totalmente Balanceada



Balanceada



Desbalanceada



Totalmente Desbalanceada (degenerada)

Tipo Árvore Binária de Busca

- A árvore é representada pelo ponteiro para o nó raiz:

```
struct noArvore {
  int info;
  struct noArv* esq;
  struct noArv* dir;
};

typedef struct noArvore NoArvore;
```

Árvore Binária de Busca - Criação

- Árvore vazia representada por NULL:

```
NoArvore* abb_cria(void)
{
  return NULL;
}
```

Árvore Binária de Busca - Impressão

- Imprime os valores da árvore em <u>ordem crescente</u>, percorrendo os nós em ordem simétrica:

```
void abb_imprime(NoArvore* a)
{
  if (a != NULL)
  {
    abb_imprime(a->esq);
    printf("%d\n", a->info);
    abb_imprime(a->dir);
  }
}
```

Árvore Binária de Busca - Busca

- Explora a propriedade de ordenação da árvore;
- Possui desempenho computacional proporcional à altura da árvore;

```
NoArvore* abb_busca(NoArvore* r, int v)
{
  if (r == NULL)
    return NULL;
  else if (r->info > v)
    return abb_busca(r->esq, v);
  else if (r->info < v)
    return abb_busca(r->dir, v);
  else
    return r;
}
```

Árvore Binária de Busca – Inserção

- Recebe um valor v a ser inserido;
- Retorna o eventual novo nó raiz da (sub-)árvore;

- Para adicionar v na posição correta, faça:
  - se a (sub-)árvore for vazia:
    - crie uma árvore cuja raiz contém v;
  - se a (sub-)árvore não for vazia:
    - compare v com o valor na raiz;
    - insira v na sae ou na sad, conforme o resultado da comparação;

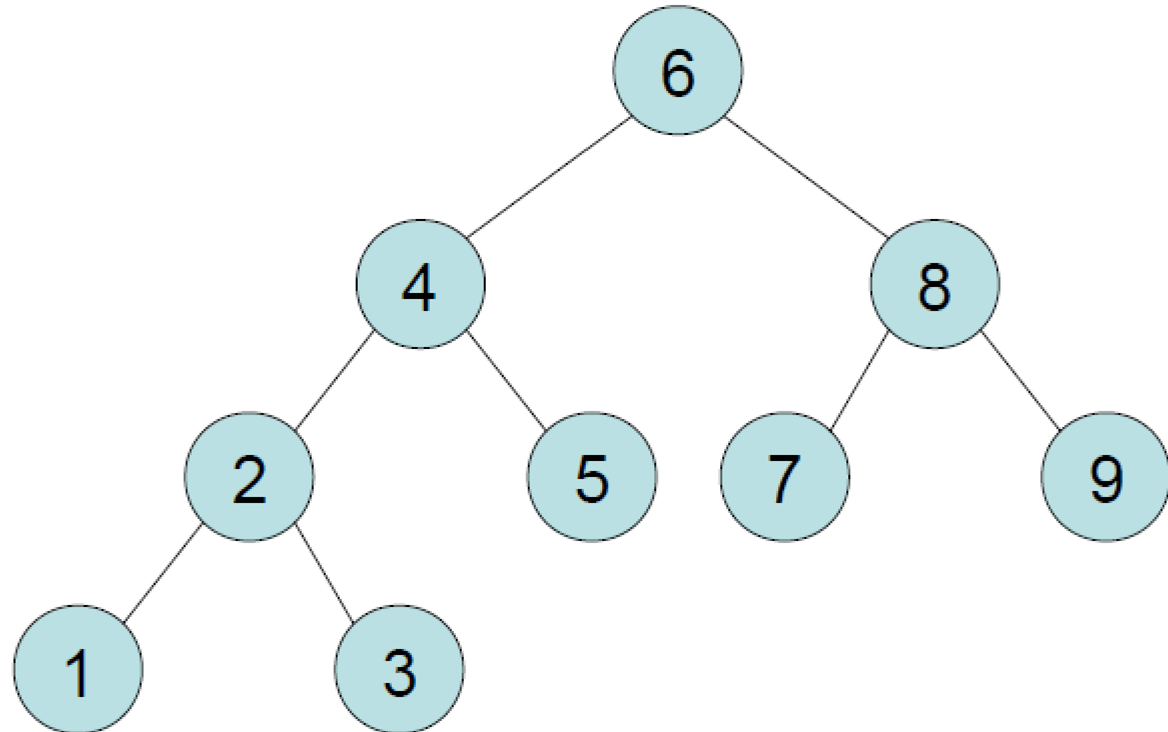
Árvore Binária de Busca – Inserção

```
NoArvore* abb_insere(NoArvore* a, int v)
{
  if (a == NULL)
  {
    a = (NoArvore*)malloc(sizeof(NoArvore));
    a->info = v;
    a->esq = NULL;
    a->dir = NULL;
  }
  else if (v < a->info)
    a->esq = abb_insere(a->esq, v);
  else
    a->dir = abb_insere(a->dir, v);

 return a;
}
```

é necessário atualizar os ponteiros para as sub-árvores à esquerda ou à direita ao chamar recursivamente a função, pois a função de inserção pode alterar o valor do ponteiro para a raiz da (sub-)árvore.

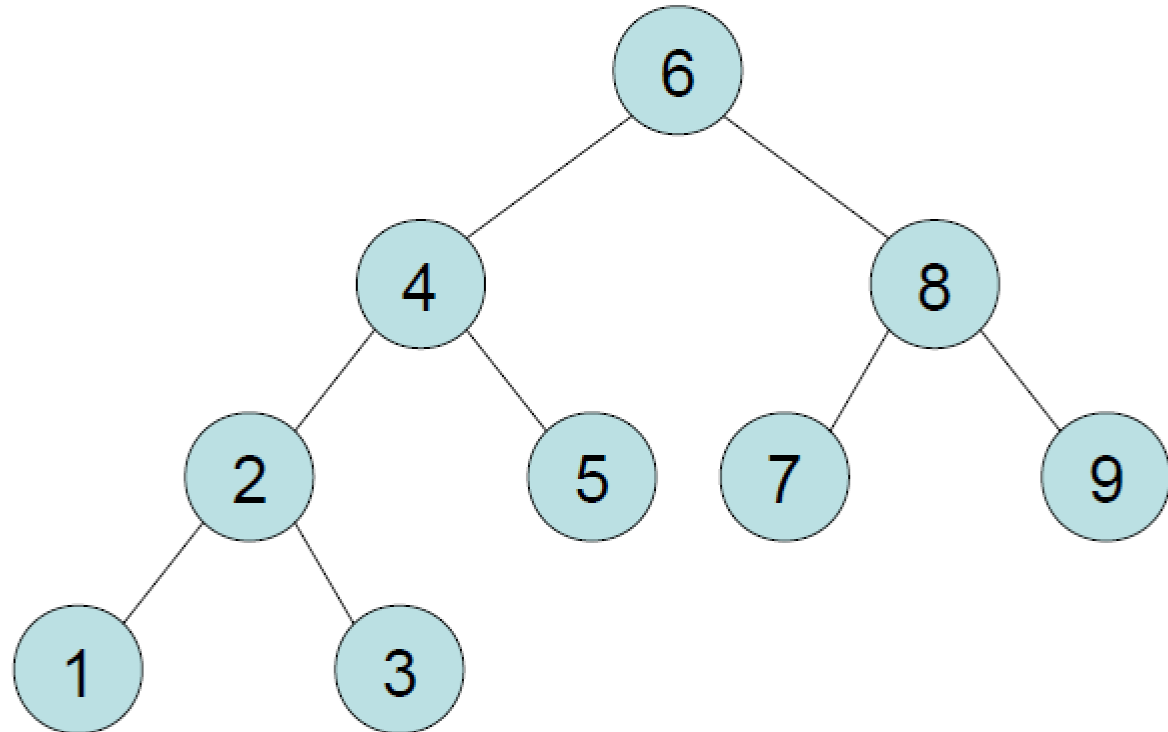
Árvore Binária de Busca – Inserção

```
cria
insere 6
insere 4
insere 8
insere 2
insere 5
insere 1
insere 3
insere 7
insere 9
```



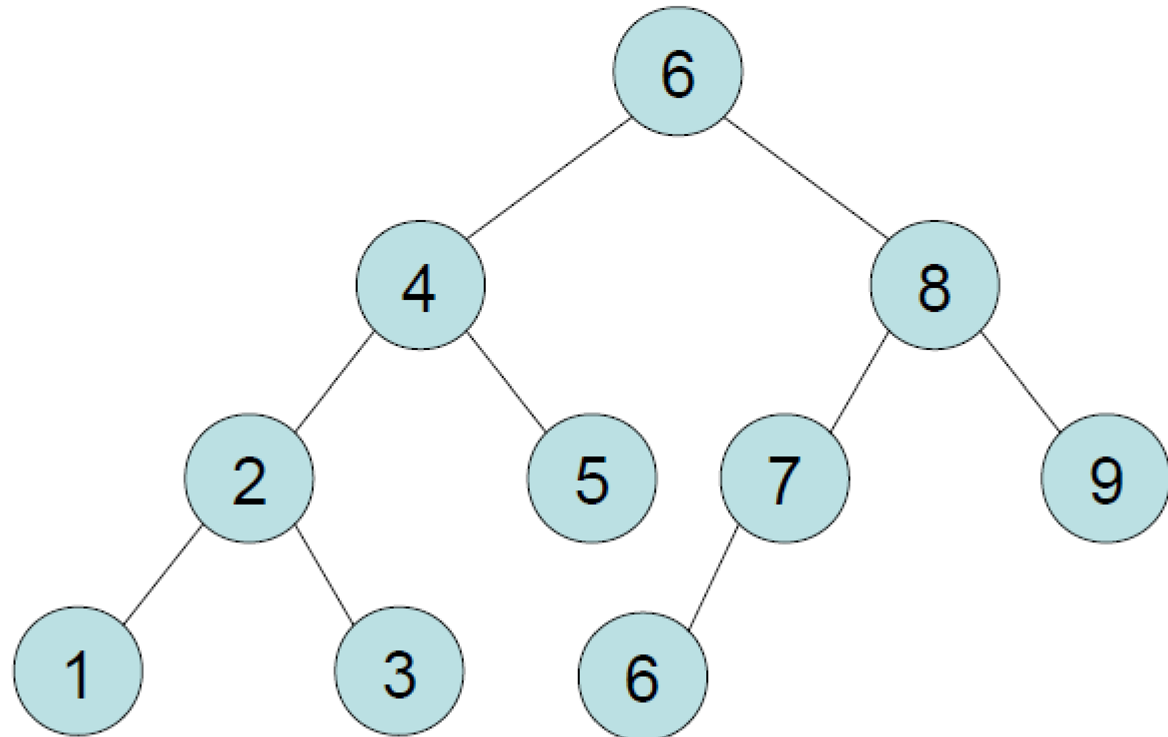
Árvore Binária de Busca – Inserção

```
cria
insere 6
insere 4
insere 8
insere 2
insere 5
insere 1
insere 3
insere 7
insere 9
insere 6
```



Árvore Binária de Busca – Inserção

```
cria
insere 6
insere 4
insere 8
insere 2
insere 5
insere 1
insere 3
insere 7
insere 9
insere 6
```



Árvore Binária de Busca – Inserção

```
NoArvore* abb_insere(NoArvore* a, int v)
{
  if (a == NULL)
  {
    a = (NoArvore*)malloc(sizeof(NoArvore));
    a->info = v;
    a->esq = a->dir = NULL;
  }
  else if (v < a->info)
    a->esq = abb_insere(a->esq, v);
  else if (v > a->info)
    a->dir = abb_insere(a->dir, v);

 return a;
}
```

Árvore Binária de Busca – Remoção

- Recebe um valor v a ser inserido;
- Retorna a eventual nova raiz da árvore;

- Para remover v, faça:
  - se a árvore for vazia:
    - nada tem que ser feito;
  - se a árvore não for vazia:
    - compare o valor armazenado no nó raiz com v:
    - se for **maior** que v, retire o elemento da sub-árvore à esquerda;
    - se for **menor** do que v, retire o elemento da sub-árvore à direita;
    - se for **igual** a v, retire a raiz da árvore;

Árvore Binária de Busca – Remoção

- Para retirar a raiz da árvore, há 3 casos:
  - **Caso 1**: a raiz que é folha;
  - **Caso 2**: a raiz a ser retirada possui um único filho;
  - **Caso 3**: a raiz a ser retirada tem dois filhos;

ABB – Remoção de Folha

- **Caso 1:** a raiz da sub-árvore é folha da árvore original:
  - libere a memória alocada pela raiz
  - retorne a raiz atualizada, que passa a ser NULL

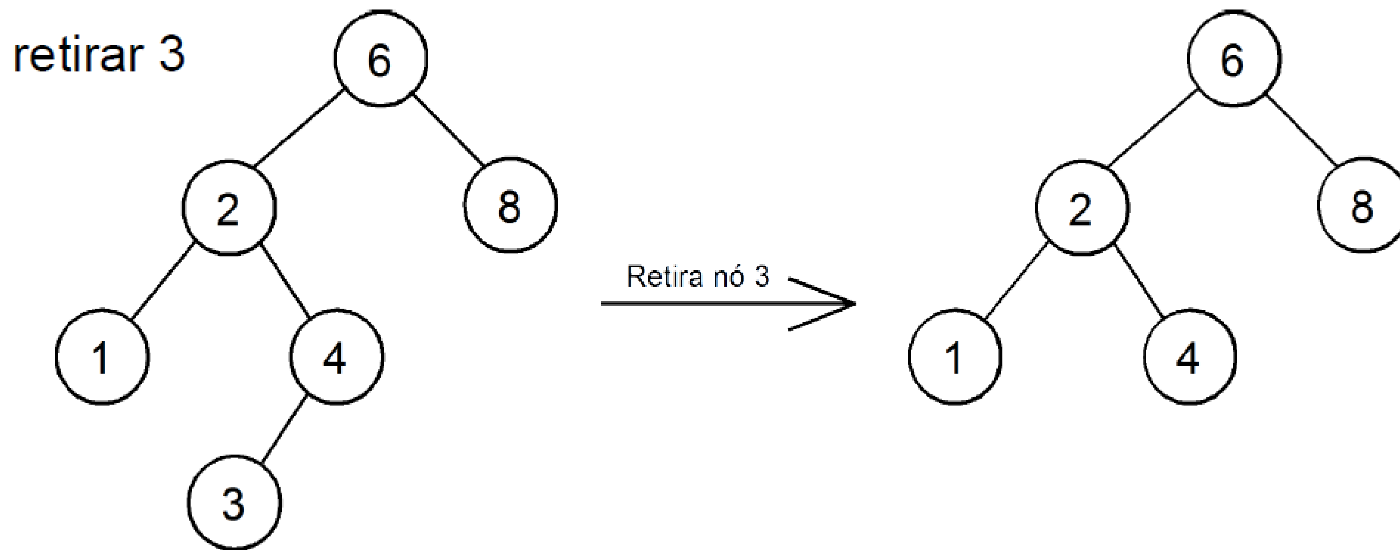


ABB – Remoção de pai de filho único

- **Caso 2:** a raiz a ser retirada possui um único filho
  - libere a memória alocada pela raiz;
  - a raiz da árvore passa a ser o único filho da raiz;

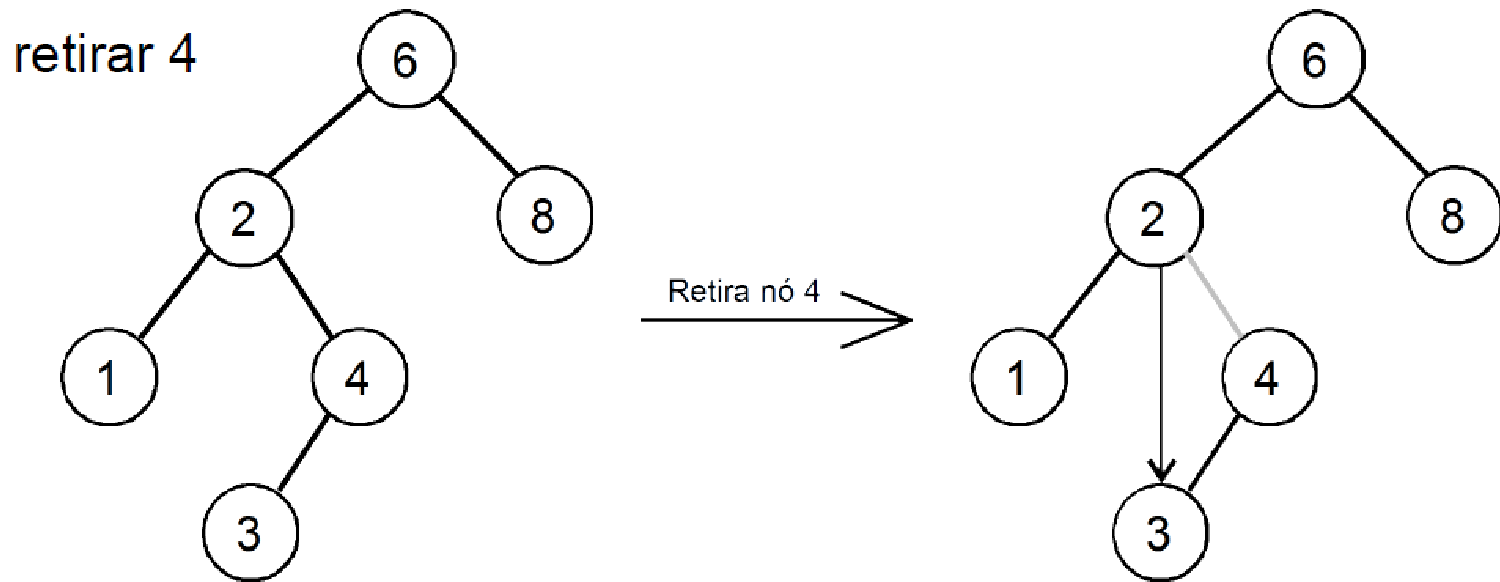
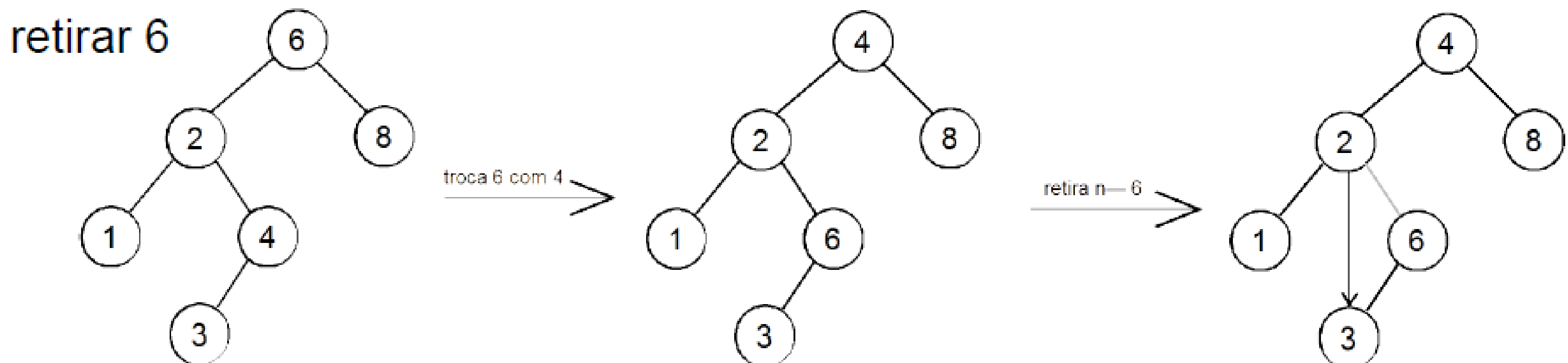


ABB – Remoção de pai de dois filhos

- **Caso 3:** a raiz a ser retirada tem dois filhos
  - encontre o nó N que precede a raiz na ordenação (o elemento mais à direita da sub-árvore à esquerda)
  - troque o dado da raiz com o dado de N
  - retire N da sub-árvore à esquerda (que agora contém o dado da raiz que se deseja retirar)
    - retirar o nó N mais à direita é trivial, pois N é um nó folha ou N é um nó com um único filho (no caso, o filho da direita nunca existe)



```
NoArvore* abb_retira(NoArvore* r, int v)
{
  NoArv *t, *f;
  if (r == NULL)
    return NULL;
  else if (r->info > v)
    r->esq = abb_retira(r->esq, v);
  else if (r->info < v)
    r->dir = abb_retira(r->dir, v);
  else {   /* achou o nó a remover */
    if (r->esq == NULL && r->dir == NULL) /* nó sem filhos */
    {
      free(r);
      r = NULL;
    }
    else if (r->esq == NULL) /* nó só tem filho à direita */
    {
      t = r;
      r = r->dir;
      free(t);
    }
    ...
```

```
    ...
    else if (r->dir == NULL)    /* só tem filho à esquerda */
    {
      t = r;
      r = r->esq;
      free (t);
    }
    else {      /* nó tem os dois filhos */
      f = r->esq;
      while (f->dir != NULL)
      {
        f = f->dir;
      }
      r->info = f->info;   /* troca as informações */
      f->info = v;
      r->esq = abb_retira(r->esq, v);
    }
  }
  return r;
}
```

Árvores Binárias de Busca – Exercício 1

- Considerando a seguinte estrutura de uma árvore binária:

```
struct noArvore{
  int info;
  struct noArvore* esq;
  struct noArvore* dir;
};
typedef struct noArvore NoArvore;
```

- Implemente uma função que, dada uma árvore binária de busca, retorne a quantidade de nós que guardam valores maiores que um determinado valor x (também passado como parâmetro). Essa função tem o seguinte protótipo:

```
int abb_maiores(NoArvore* a, int x);
```

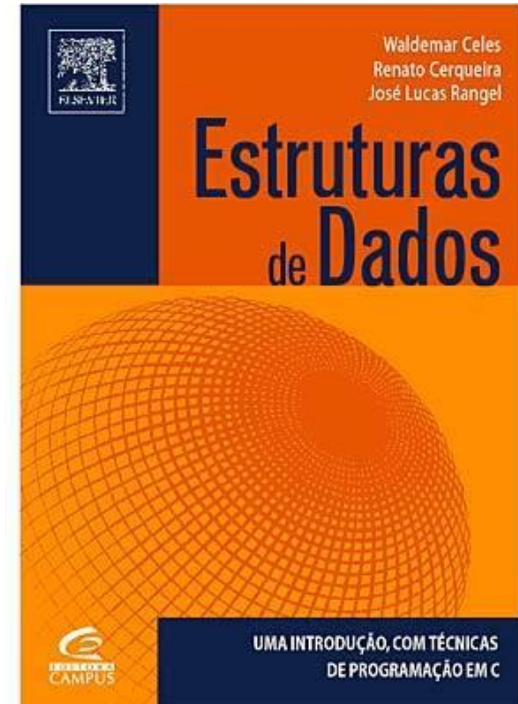
Árvores Binárias de Busca – Exercício 1

```
int abb_maiores(NoABB* a, int x)
{
  int n = 0;
  if(a == NULL)
    return 0;
  if(a->info > x)
  {
    n++;
    n = n + abb_maiores(a->esq, x);
    n = n + abb_maiores(a->dir, x);
  }
  else{
    n = n + abb_maiores(a->dir, x);
  }
  return n;
}
```

Leitura Complementar

- Waldemar Celes, Renato Cerqueira, José Lucas Rangel, **Introdução a Estruturas de Dados**, Editora Campus (2004).

- **Capítulo 13 – Árvores**
- **Capítulo 17 – Busca**



Exercícios

Lista de Exercícios 14 – Árvores Binárias de Busca